ФЕДЕРАЛЬНЫЙ ИНТЕРНЕТ-ЭКЗАМЕН ДЛЯ ВЫПУСКНИКОВ БАКАЛАВРИАТА (ФИЭБ)

НАПРАВЛЕНИЕ ПОДГОТОВКИ
01.03.01 МАТЕМАТИКА
ПРИМЕРЫ ЗАДАНИЙ ПИМ

ЧАСТЬ 1 ПИМ

Дисциплина «Дискретная математика»
Задание (элементы доступны для перетаскивания)

Установите соответствие между названием логической операции и ее словесным выражением.

1. Конъюнкция
2. Дизъюнкция
3. Импликация
4. Отрицание

Варианты ответов:
1) если … то
2) и
3) не
4) или
5) тогда и только тогда, когда

Дисциплина «Дифференциальные уравнения»
Задание (введите ответ в поле)

Решением уравнения $x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+z\frac{\partial u}{\partial z}=0$ в области $x>0,\ y>0,\ z>0$ является функция $u(x,y,z)=\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{z^2}$, которая в точке $M(2,1,1)$ принимает значение …

Введите ответ

Дисциплина «Линейная алгебра и аналитическая геометрия»
Задание (укажите не менее двух вариантов ответов)

Дана плоскость $2x-5y+10z+5=0$ (система координат декартова). Параллельны этой плоскости или лежат в ней прямые …

Варианты ответов:
1) $\frac{x-2}{5}=\frac{y+1}{4}=\frac{z+5}{1}$

2) $\frac{x}{5}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-4}{3}$

3) $\frac{x+2}{3}=\frac{y}{-2}=\frac{z+4}{3}$

4) $\frac{x}{5}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z-2}{-2}$

5) $\frac{x}{5}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-4}{-3}$

Дисциплина «Математический анализ»

Задание (установите соответствие между нумерованными объектами в формулировке задания и вариантами ответов)

Установите соответствие между формулировкой теоремы и ее названием.

1. Если функция $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$, принимает в концах этого отрезка равные значения, то есть $f(a)=f(b)$, и дифференцируема на интервале (a,b), то существует такая точка $\xi \in (a,b)$, что $f'(\xi)=0$

2. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ и дифференцируема на интервале (a,b), то в этом интервале найдется хотя бы одна такая точка ξ, что $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$

3. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на отрезке $[a,b]$, дифференцируемы на интервале (a,b), причем $g'(x)\neq 0$ во всех точках этого интервала, то найдется хотя бы одна такая точка $\xi \in (a,b)$, что $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g(\xi)}$

4. Если функция $f(x)$ имеет локальный экстремум в точке x_0 и дифференцируема в этой точке, то $f'(x_0)=0$

Варианты ответов:

1) теорема Лагранжа
2) теорема Бернулли
3) теорема Ролля
4) теорема Коши
5) теорема Ферма

Дисциплина «Теория вероятностей и математическая статистика»

Задание (введите ответ в поле)

Дискретная случайная величина X задана рядом распределения:

Значения x_i	-2	-1	0	1	3
Вероятности p_i	0,1	C	0,25	0,15	0,2

Вероятность события $A=\{X<1\}$ равна …

Введите ответ

Дисциплина «Численные методы»

Задание (укажите не менее двух вариантов ответов)

При решении уравнения $f(x) = 0$ методом деления пополам функция $f(x)$ может принадлежать пространствам …

Варианты ответов:

1) $C^1[a,b]$
2) ступенчатых функций
3) $C[a,b]$
4) $C^2[a,b]$
5) функций Дирихле

ЧАСТЬ 2 ПИМ

Кейс-задание
(Вид профессиональной деятельности: производственно-технологическая)

Задание
Мэр города *N* решил украсить к Новому году 4 городских объекта гирляндами (главную площадь, центральный парк, набережную и детскую площадку). В связи с этим он пригласил фирму «Точность» для установки столбов и прокладки тросов, на которые будут повешены гирлянды.
Вам как одному из ведущих работников фирмы было поручено решение некоторых задач по оптимизации процесса и разработке надежности конструкций:
– обеспечить поставку материалов к объектам, оптимизируя расходы на транспортировку;
– спроектировать сеть, которая будет соединять все указанные объекты;
– обеспечить безопасность населения, для чего необходимо учесть высоту прокладывания гирлянд и расстояние между опорами (люди не должны доставать до гирлянд, чтобы не допустить разрывов и несчастных случаев).
В Ваши должностные обязанности входит руководство установкой павильона-кафе, которое максимально обеспечит население города, пришедшее на площадь, горячими напитками.

Для выполнения заданий используйте информацию, представленную в приложениях.

Краткое содержание информации	Имя файла	Скачать файл	
Информация о распределении нагрузки по пролету нити	1k1_Pril1	PDF	DOCX
Информация о колебаниях однородной струны	1k1_Pril2	PDF	DOCX
Информация для построения линейного тренда	1k1_Pril3	PDF	DOCX
Таблица расстояний (в метрах) между планируемыми опорами	1k1_Pril4	PDF	DOCX

Подзадача 1 (введите ответы)

Для проведения работ необходимо решить задачу о назначениях, когда требуется доставить столбы и трос с четырех баз к четырем выбранным мэром объектам. На каждой базе имеется достаточное количество оборудования, чтобы обеспечить потребности любого объекта. Расстояния между каждой базой и каждым объектом приведены в матрице $C = (c_{ij})$, где c_{ij} – расстояние от i-й базы до j-го объекта.

$$\begin{pmatrix} 2 & 10 & 9 & 7 \\ 15 & 4 & 14 & 8 \\ 13 & 14 & 16 & 11 \\ 4 & 15 & 13 & 19 \end{pmatrix}.$$

Вам необходимо распределить заказы по базам так, чтобы общая дальность транспортировки была минимальной.
Тогда общая дальность перевозок составит ______ км.

Оборудование с первой базы необходимо направить на объект под номером …

Оборудование со второй базы необходимо направить на объект под номером …

Оборудование с третьей базы необходимо направить на объект под номером …

Оборудование с четвертой базы необходимо направить на объект под номером …

Общая дальность перевозки составит ______ км.

Подзадача 2 (элементы доступны для перетаскивания)

При установке оборудования важно знать, насколько будет провисать трос между столбами, чтобы не допустить обрыва гирлянд и травм у отдыхающих.

Гибкие элементы, расположенные между двух опор, принято описывать с помощью ***гибких нитей***. Они относятся к такому виду растянутых элементов, при определении прочности которых большое значение имеет собственный вес. Гибкая нить сопротивляется только растяжению.

Изучите схему, приведенную в приложении 1, и найдите наибольшее значение стрелы провисания гибкой нити в упрощенном случае, если длина пролета равна 100 м, а разность между длиной гибкой нити и длиной пролета не превосходит 0,24 м, считая представленную в приложении 1 формулу точной.

Для решения задачи заполните пропуски в схеме приложения 1 и укажите ответы в системе.

1. Учитывая условия $x = b = l/2$ и $y = f$, для величины f получаем
2. Величина силы H равна
3. Длина дуги вычисляется по формуле
4. Используя следствие из замечательного предела, получаем эквивалентность следующих функций
5. Наибольшее значение стрелы провисания гибкой нити равно

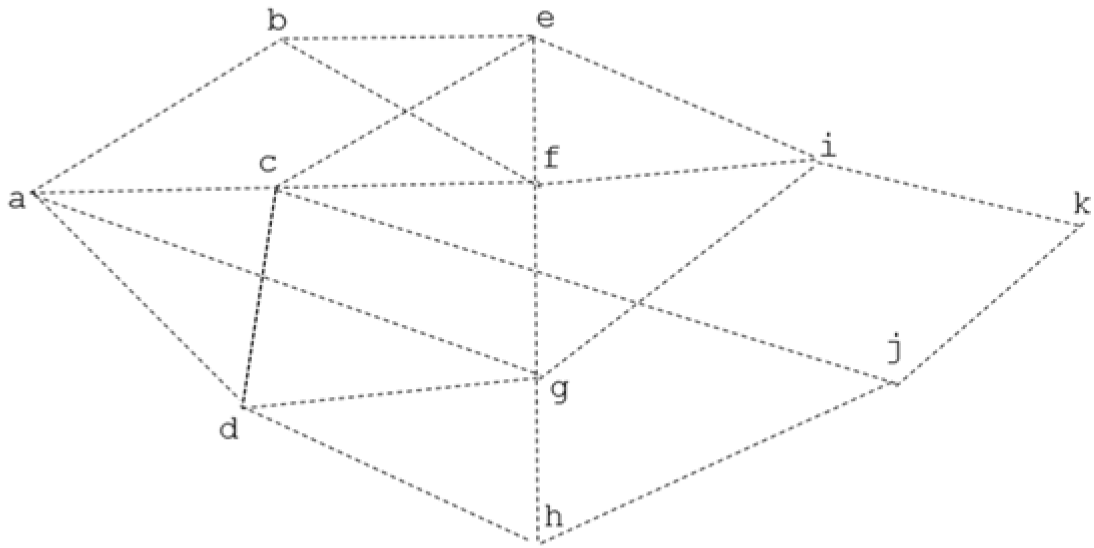
При решении задания используйте файл 1k1_Pril1.

Варианты ответов:

1) $s = 2\int_0^{l/2} \sqrt{1+y'^2}\,dx$
2) $f = \dfrac{ql^2}{2H}$
3) $f = \dfrac{ql^2}{8H}$
4) $H = \dfrac{ql^2}{8f}$
5) $s = 2\int_0^{l/2} y(x)\,dx$
6) 3
7) $\sqrt{1+y'^2} \approx 1 + \dfrac{1}{2}y'^2$
8) 5

Подзадача 3 (введите ответ в поле)

По задумке мэра главная площадь и центральный парк должны быть освещены электрическими гирляндами. Для бесперебойной работы освещения необходимо объединить эти объекты в единую сеть через линии электропередач по установленным столбам.
Прокладка электрической сети ведется согласно плану расположения столбов. Схема расположения столбов, необходимых для освещения, согласно карте объектов, приведена на схеме (обозначенные соответственно точки *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, …, *k*):



Затраты на установку линии электропередач прямо пропорциональны расстояниям (в метрах) между планируемыми столбами. Прокладка 1 м кабеля обходится бюджету города в 5 у.е.
Необходимо сформировать проект освещения праздничной иллюминации двух объектов города, который задействует имеющуюся схему расположения столбов. Затраты на установку кабеля должны иметь минимальную нагрузку на бюджет города.
Тогда минимальная сумма затрат будет равна ________ у.е.
При решении задания используйте файл 1k1_Pril4.

Введите ответ

Подзадача 4 (элементы доступны для перетаскивания)

Для уверенности в надежности построенной конструкции следует изучить, как будет колебаться участок троса, расположенный между двумя столбами.
Используя формулу Даламбера, рассмотрите задачу о колебаниях провода, жестко закрепленного между опорами, находящимися друг от друга на расстоянии 8 м. Известно, что в начальный момент времени отклонение провода от положения равновесия определено функцией $\varphi(x) = \frac{x}{25} - \frac{x^2}{200}$, начальная скорость предполагается нулевой. Необходимо определить (в метрах), на какую величину отклонится от положения равновесия провод в точке, расположенной от первого столба на расстоянии 3 м в момент времени $t = 5$ с, если скорость распространения волн $a = 1$ м/с.
Для решения задачи продолжите данные утверждения, заполнив пропуски верными выражениями.
1. Для рассматриваемого в задаче случая формула Даламбера принимает вид
2. Условия закрепления концов провода имеют вид
3. Функция, задающая начальную форму провода, должна быть продолжена на всю ось
4. Провод в указанной точке и в указанное время отклонится на м.
При решении задания используйте файл 1k1_Pril2.

Варианты ответов:

1) $u(x,t) = \dfrac{\Phi(x-t)+\Phi(x+t)}{2}$
2) $0,06$
3) $u'_x(0,t) = u(8,t) = 0$
4) нечетным образом
5) $0,57$
6) $u(0,t) = u(8,t) = 0$
7) $u(x,t) = \dfrac{1}{2}\int\limits_{x-t}^{x+t}\Psi(s)ds$
8) четным образом

Подзадача 5 (введите ответ в поле)

На новогодние праздники традиционно на центральной площади города устанавливается шатер-кафе. Данные о наибольшем количестве людей, посетивших это кафе за 1 час в прошлые годы, приведено в таблице в виде временного ряда. Требуется спрогнозировать нагрузку на кафе в предстоящем году, построить линейный тренд.
Предполагая отсутствие автокорреляций остатков, ожидаемая посещаемость кафе в 2022 году составит _____ чел. (Промежуточные значения округляйте до тысячных, ответ округлите до целого числа.)

Год	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020	2021
Кол-во людей	42	44	43	45	48	51	52	51	53	54

При решении задания используйте файл 1k1_Pril3.

Введите ответ

ПРИЛОЖЕНИЯ К КЕЙС-ЗАДАНИЮ

Приложение 1k1_Pril1

Информация о распределении нагрузки по пролету нити

Пусть имеется гибкая нить постоянного сечения, нагруженная собственным весом и подвешенная в двух точках, находящихся на разных уровнях (рис. 1). Под действием собственного веса нить провисает по некоторой кривой *AOB*.

Горизонтальная проекция l расстояния между опорами (точками ее закрепления) носит название ***пролета***.

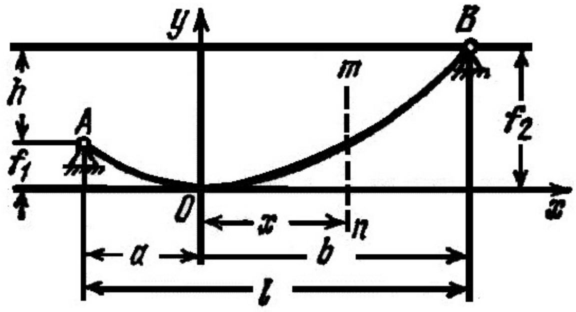


Рис. 1

Пусть нить имеет постоянное сечение, следовательно, вес ее распределен равномерно по ее длине. Предположим, что провисание нити невелико по сравнению с ее пролетом, а длина кривой *AOB* мало отличается (не более чем на 10%) от длины хорды *AB*. Это значит, что вес нити равномерно распределен по длине ее проекции на горизонтальную ось, то есть вдоль пролета l.

Если вырезать часть длины нити сечениями, проходящими через начало координат и на расстоянии x от начала координат (сечение *m-n*), то действие отброшенной части на оставшуюся возможно только в виде силы, направленной по касательной к кривой провисания нити в месте разреза (рис. 2).

Равномерно распределенная по пролету нити нагрузка интенсивностью q направлена вертикально вниз. Воздействие левой отброшенной части (горизонтальная сила H) направлено влево. Действие правой отброшенной части (сила T) направлено по касательной к прямой провисания нити в этой точке.

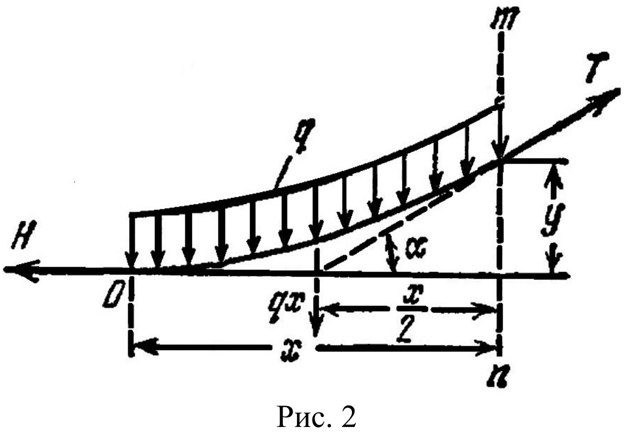


Рис. 2

Кроме того, будем считать, что обе точки провисания нити находятся на одном уровне, то есть $f_1 = f_2 = f$ (в этом случае величина f называется ***стрелой провисания***) и в нашем приближении кривая провисания гибкой нити описывается уравнением

$$y = \frac{qx^2}{2H}. \quad (1)$$

Если обе точки провисания нити находятся на одном уровне, то $f_1 = f_2 = f$. Величина f в данном случае будет так называемой ***стрелой провисания***. Так как в этом случае ввиду симметрии низшая точка нити находится посередине пролета, то $a = b = l/2$. Подставляя в уравнение (1) значения $x = b = l/2$ и $y = f$, получаем

$$f = \ldots \tag{2}$$

Из этой формулы найдем величину силы H: _______.

Величина H называется горизонтальным ***натяжением нити***.

Геометрическая зависимость между длиной нити, пролетом и стрелой провеса вычисляется с помощью формулы для длины дуги _______.

При малых провесах y' мало, поэтому $\sqrt{1+y'^2} \approx \ldots$

С учетом этого выражения и формулы (2), получим $s \approx l\left(1 + \frac{8}{3}\frac{f^2}{l^2}\right)$.

Информация о колебаниях однородной струны

Пусть вдоль отрезка $[0,l]$ натянута струна. Каждую точку струны можно охарактеризовать значением ее абсциссы x. Описание процесса колебания струны может быть проведено при помощи задания положения точек струны в различные моменты времени. Будем предполагать, что смещения струны лежат в одной плоскости x, u, и вектор смещения u перпендикулярен в любой момент к оси x. Тогда процесс колебаний струны можно описать одной функцией $u(x,t)$, характеризующей вертикальное перемещение струны. Будем рассматривать струну как гибкую упругую нить. Математическое выражение понятия гибкости заключается в том, что напряжения, возникающие в струне, всегда направлены по касательным к ее мгновенному профилю. Это условие выражает собой то, что струна не сопротивляется изгибу.

Задача о свободных колебаниях однородной струны сводится к решению уравнения гиперболического типа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{1}$$

где величина a^2 характеризует скорость распространения волн.

Для однозначности определения реальной формы струны необходимы четыре дополнительных условия. По времени – начальные условия, например, вида

$$u(x,0) = \varphi(x),\ u'_t(x,0) = \psi(x).$$

Здесь функция $\varphi(x)$ характеризует форму струны в начальный момент времени $t = 0$, функция $\psi(x)$ характеризует начальную скорость струны.

Также ставятся условия закрепления концов струны. Предположим, что струна жестко закреплена на концах, то есть точки $x = 0$ и $x = l$ не смещаются. Это означает выполнение условий

$$u(0,t) = 0,\ u(l,t) = 0.$$

Если правый конец струны является свободным (колечком закреплен к спице, расположенной перпендикулярно к оси Ox, по которой он может скользить (без учета трения)), то получаем условие

$$u'_x(l,t) = 0.$$

Если же правый конец упруго закреплен (с помощью пружины жесткости k), то имеет место условие

$$u_x'(l,t) + ku(l,t) = 0.$$

Одним из широко используемых способов решения уравнения вида (1) является метод характеристик, называемый методом Даламбера. Согласно формуле Даламбера, решение (1) представимо в виде суммы двух волн

$$u(x,t) = \frac{\Phi(x+at) + \Phi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \Psi(s)\,ds.$$

Функции $\Phi(x)$ и $\Psi(x)$ связаны с начальной формой и скоростью струны соответственно, а также зависят от условий закрепления концов струны.

В случае, когда концы струны жестко закреплены, функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ доопределяют на отрезок [–l,0] нечетным образом, а затем продолжают на всю ось как $2l$ – периодические. Полученные таким образом функции обозначают через $\Phi(x)$ и $\Psi(x)$ соответственно. Таким образом, функция $\Phi(x)$ совпадает с $\varphi(x)$ при $x \in [0,l]$; функция $\Psi(x)$ совпадает с $\psi(x)$ при $x \in [0,l]$. При этом верны равенства

$$\Phi(x) = -\Phi(-x),$$
$$\Psi(x) = -\Psi(-x),$$
$$\Phi(x) = -\Phi(2l - x),$$
$$\Psi(x) = -\Psi(2l - x).$$

В случае условия свободного конца функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ доопределяют четным образом относительно соответствующей этому концу точки.

Если говорить о физичности струны, то она является не только составной частью многих музыкальных инструментов, но и может быть также конструктивным элементом линий электропередач, подвесных канатных дорог и т.д. В этих устройствах колебания струны являются чаще всего, нежелательным явлением, так как могут привести к разрушению конструкции.

Информация для построения линейного тренда

Прогнозирование на основе кривых роста предполагает выбор формы кривой, оценивание ее параметров, проверку адекватности, а также точечный и интервальный прогноз с помощью этой функции.

Параметры модели оцениваются методом наименьших квадратов. Для линейной модели $\tilde{x}_t = \beta_0 + \beta_1 t$ нормальная система имеет вид

$$n\beta_0 + \beta_1 \sum t = \sum x_t,$$
$$\beta_0 \sum t + \beta_1 \sum t^2 = \sum t x_t.$$

Решение системы можно представить в виде

$$\tilde{\beta}_1 = \frac{Q_{tx}}{Q_t},$$

$$\tilde{\beta}_0 = \bar{x} - \tilde{\beta}_1 \cdot \bar{t},$$

где

$\bar{t} = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} t$; $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} x_t$ – выборочные средние,

$Q_{tx} = \sum_{t=1}^{n} t x_t - n\bar{t}\bar{x}$; $Q_t = \sum_{t=1}^{n} t^2 - n\bar{t}^2$ – суммы квадратов.

Таблица расстояний (в метрах) между планируемыми опорами

	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k
a		20	20	30			50				
b	20				20	40					
c	20			10	20	30				40	
d	30		10				10	20			
e		20	20			10			50		
f		40	30		10		10		30		
g	50			10		10		20	40		
h				20			20			40	
i					50	30	40				10
j			40					40			60
k									10	60	